

Τι μελετά η Θεωρία Αποφάσεων;

Η Θ.Α. μελετά προβλήματα υπερπροσδοκίας\* κατά τη διάρκεια των οποίων η λήψη απόφασης ~~ορίζεται~~ καθορίζεται με βάση λίγα κριτήρια.

Συμπερασματολογία  $\rightarrow$  Εκτιμητική  
 $\rightarrow$  Έλεγχος υποθέσεων

Πληθυσμός: Το σύνολο των οντοτήτων των οποίων ένα τουλάχιστον χαρακτηριστικό γνωρίσμα μελετάμε.

Το χαρακτηριστικό αυτό γνωρίσμα είναι τέτοιο ώστε να ~~μεταβάλλεται~~ μετ/ται από μέλος σε μέλος του πληθυσμού, και λέγεται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.).

Η τ.μ. περιγράφεται ικανοποιητικά από μια κατανομή με σ.π. ή σ.π.π.  $f(x, \theta)$  όπου  $\theta$  άγνωστη παράμετρος με  $\theta \in \Theta$   $\xrightarrow{\text{παρ/κός χώρος}}$

Ο παρ/κός χώρος περιέχει όλες τις δυνατές (πιθανές) τιμές της άγνωστης παρ/τραι  $\theta$ .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

\* Έστω  $X \sim B(n=f, p)$   $\theta = p \in [0, 1] = \Theta$  ο αριθμός των "επιγόντων" που θα ευστοχήσω αν σουτάρω  $f$  φορές

\*  $X \sim \text{Exp}(\theta)$ ,  $\theta$  άγνωστη παράμετρος  $\Theta = (0, +\infty)$ , χρόνος ζωής σε μέρες μιας ηλεκτρονικής συσκευής.

\*  $X$ , τ.μ. που παρουσιάζει το επίπεδο της χρησιμοποίησης στο αίμα, όπου  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ = \Theta$

Διάννητα

Στη Θ.Α. στη διάθεσή μας για την εκτίμηση ή τη λήψη οποιασδήποτε απόφασης έχουμε τα δεδομένα  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$  που είναι οι παρατηρούμενες τιμές των τ.μ.  $X_1, X_2, \dots, X_n$

διάννητα: συμβολίζεται με  $\underline{x}$  ή γραφή κάτω από το γράμμα  $x$

$x_1, x_2, \dots, x_n$  τ.δ. από έναν πληθυσμό με σ.π ή σ.π.π.  $f(x_i; \theta)$ ,  $i=1, \dots, n$

σημειώνει ότι  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ανεξάρτητες και ισόνομες  
 (= διέχονται από τον ίδιο νόμο, την ίδια σ.π. ή σ.π.π.)

Η από κοινού κατανομή των  $x_1, \dots, x_n$

Είναι η  $f(x; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$

→ Αν δεν ήταν ισόνομες οι  $x_i$

$x_1, \dots, x_n$  τ.δ από την  $f_i$  θα είχαμε  $f_i$

$f(x; \theta)$ . Εστω ο στόχος είναι η εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου  $\theta$  ή μιας συν/σης αυτής  $g(\theta)$ . Αυτό μπορεί να γίνει ΜΟΝΟ στη βάση γνωστών ποσοτήτων

Μια στατιστική συνάρτηση είναι κάθε συνάρτηση των  $x_1, x_2, \dots, x_n$  και γνωστών ποσοτήτων

Μια στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση μιας άγνωστης παραμέτρου  $\theta$ , λέγεται εκτιμητής, ενώ η τιμή που προκύπτει όταν αντικαταστήσουμε τα  $x_1, x_2, \dots, x_n$  από τις τιμές τους, λέγεται εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μέσο μηνιαίο εισόδημα ( $\theta$ )

$x$  μηνιαίο εισόδημα

$x_1, x_2, \dots, x_n$  τ.δ

Εκτιμητής:  $\frac{\sum x_i}{n}$

Εκτίμηση:  $\frac{108 + 103 + \dots + 110}{10}$

για  $\begin{matrix} x_1 = 108 \\ x_2 = 103 \\ \vdots \\ x_{10} = 110 \end{matrix}$

Χώρος Απογιάσεων ( $D$ ): Είναι το σύνολο των δυνατών απογιάσεων, ενεργείων πράξεων  $d$  που μπορεί να πάρει κάποιος

Εκτιμητής: Ο χώρος των Απογιάσεων ταυτίζεται με τον παραμετρικό χώρο  $D \equiv \Theta$

Συνάρτηση απογιάσεως: Είναι μια μετρήσιμη συν/ση  $d$  η οποία ορίζεται:  $d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   
 Δηλαδή ορίζεται στον χώρο  $\mathbb{R}^n$  και παίρνει τιμές στον χώρο  $\mathbb{R}$ .  
 $d(x) = d(x_1, \dots, x_n)$  και η τιμή του λέγεται απογίαση

## Συνάρτηση Φηκίας

### Απώλειας

Είναι η συνάρτηση που εκφράζει την απώλεια ή φηκία που θα έχουμε όταν παίρνουμε την απόφαση  $d(x)$  την στιγμή που η πραγματική αληθεία είναι  $\theta$ .

$$L(\theta, d) : \mathcal{H} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

loss function  $d(x)$

$$L(\theta, \theta) = 0$$
$$L(\theta, d) \geq 0 \quad \forall \theta$$

Κάθε τριάδα  $(\mathcal{H}, \mathcal{D}, L)$  ορίζει ένα στατιστικό πρόβλημα απόφασης

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΥΝ/ΣΕΩΝ ΑΠΩΛΕΙΑΣ

1. Απόλυτο σφάλμα  $L(\theta, d) = |d - \theta| = |\theta - d|$
2. Τετραγωνικό σφάλμα:  $L(\theta, d) = (d - \theta)^2$
3.  $L(\theta, d) = |\theta - d|^\kappa, \kappa > 0$

4. LINE x (linear exponential)

$$L(\theta, d) = e^{\kappa(d-\theta)} - \kappa(d-\theta) - 1$$

$$L(\theta, \theta) = e^{\kappa(0)} - \kappa \cdot 0 - 1 = 0$$

Θα πρέπει να  $L(\theta, d) \geq 0 \quad \forall \theta$

δηλ. πρέπει να  $e^{\kappa(d-\theta)} - \kappa(d-\theta) - 1 \geq 0$

Θέτω  $\kappa(d-\theta) = x$  άρα πρέπει να  $e^x - x - 1 \geq 0$

Έστω  $f(x) = e^x - x - 1$

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f''(x) = e^x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$\searrow \nearrow$   
 $f(x) \geq f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

5. Stein

$$L(\theta, d) = \frac{d}{\theta} - 1 - \log \frac{d}{\theta}$$

$$L(\theta, \theta) = 0 \quad \boxed{x - 1 - \log x \geq 0}$$

$$f(x) = x - 1 - \log x$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

$$6. L_1(\theta, d) = \begin{cases} (d-\theta)^2, & d < \theta \\ 10(d-\theta)^2, & d \geq \theta \end{cases} \quad L_2 = \begin{cases} 100(d-\theta)^2, & d < \theta \\ (d-\theta)^2, & d \geq \theta \end{cases}$$

$\nearrow$  υποεκτίμηση  
 $\searrow$  υπερεκτίμηση

### ΜΕΙΣΘΕΚΤΗΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΠΩΛΕΙΑΣ

Κάθε πρόταση που προκύπτει με τη συνεισδοτική μιας οποιαδήποτε συνάρτησης απώλειας  $L(\theta, d(x))$  έχει τα εξής δύο προβλήματα:

- 1) Έχει άγνωστη επί ραβί το  $\theta$  είναι άγνωστη παράμετρος
  - 2) Είναι τυχαία επί ραβί των  $x_1, \dots, x_n$
- $X \rightarrow \mathbb{R}^X$

Ένας τρόπος διαχείρισης του σφάλματος εκτίμησης είναι η εισαγωγή της συνάρτησης κινδύνου ή διακινδυνεύσεως που ορίζεται από τη σχέση  $R(\theta, d) = \mathbb{E}_X L(\theta, d)$

Risk function

Εκ σημαίνει αναμενόμενη τιμή των απωλειών ως προς το  $X$

### ΠΡΟΤΑΣΗ:

Αν η συν/ση απώλειας είναι το Τ.Σ τότε  $R(\theta, d) = \text{Var } d + (E d - \theta)^2$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} R(\theta, d) &\stackrel{\text{ορισμός}}{=} \mathbb{E} L(\theta; d) = \mathbb{E} (d - \theta)^2 \\ &= \text{Var}(d - \theta) + (E(d - \theta))^2 \\ &= \text{Var } d + (E d - \theta)^2 \end{aligned}$$

$$E X^2 = \text{Var } X + (E X)^2$$

$$\text{Var}(X + C) = \text{Var } X$$

$$E(X + C) = E X + C$$